t-Test : Vergleich zweier Mittelwerte FTCCT3/4

Vorbemerkung: Der t-Test setzt voraus, dass die beiden *Varianzen (= Quadrate der Standardabweichungen)* der verglichenen Stichproben *„homogen"* sind, d.h. sich nur unwesentlich und zufallsbedingt unterscheiden. Ob die beiden Varianzen homogen sind, kann mit einem F-Test geprüft werden.

Beispiel: *Bei zwei Farbstoffproben wurden mehrmals der Gehalt bestimmt. Mit den Stichprobenumfängen nA = 10 und nB = 12 resultieren folgende Ergebnisse (in mg/L):*

													Mittelwert	**Standardabweichung**
Probe A:	20,8	21,5	20,4	21,3	20,1	20,4	21,0	20,9	21,2	19,8			**20,74**	**0,550151494287407**
Probe B:	21,2	20,1	19,9	20,5	19,9	21,0	19,8	20,2	20,0	20,8	20,1	20,1	**20,30**	**0,465149047471492**

Es ist auf dem Signifikanzniveau von 95% (Irrtumswahrscheinlichkeit α = 5% = 0,05) zu prüfen, ob es einen tatsächlichen Unterschied zwischen den wahren Gehalten gibt.

Allgemeine Vorgehensweise	**Konkretisierung für dieses Beispiel**
1. Formulierung der Nullhypothese (H_0) Die Nullhypothese ist immer die Annahme, dass der Unterschied zwischen den Mittelwerten zufälliger Natur ist, die beiden *wahren Mittelwerte* (würde man erhalten wenn man die Mittelwerte aus sehr großen oder unendlich großen Stichprobenumfängen vergleichen würde) sind identisch.	**1. Formulierung der Nullhypothese (H_0)** Wir gehen davon aus, dass die mittlere Farbstoffkonzentration beider Proben in Wirklichkeit identisch ist. Der Unterschied zwischen den beiden Mittelwerten ist nur zufälliger Natur, da nur Stichproben miteinander vergleichen wurden.
2. Berechnung der Teststatistik, $t_{Prüf}$: Die Berechnung erfolgt mithilfe der gemeinsamen Standardabweichung $s_{A,B}$: $$s_{A,B}=\pm\sqrt{\frac{(n_A-1)\cdot s_A^2+(n_B-1)\cdot s_B^2}{n_A+n_B-2}}$$ ODER wenn alle Messergebnisse x bekannt sind: $$s_{A,B}=\pm\sqrt{\frac{\sum(x_A-\bar{x}_A)^2+\sum(x_B-\bar{x}_B)^2}{n_A+n_B-2}}$$ und folgender Formel für die Teststatistik $$t_{Prüf}=\frac{\lvert\bar{x}_A-\bar{x}_B\rvert}{s_{A,B}}\cdot\sqrt{\frac{n_A\cdot n_B}{n_A+n_B}}$$	**2. Berechnung der Teststatistik, $t_{Prüf}$:** Da die Standardabweichungen s_A und s_B gegeben sind: $$s_{A,B}\approx\pm\sqrt{\frac{(10-1)\cdot 0{,}55015^2+(12-1)\cdot 0{,}46515^2}{10+12-2}}\approx 0{,}50517$$ $$t_{Prüf}\approx\frac{\lvert 20{,}74-20{,}30\rvert}{0{,}50517}\cdot\sqrt{\frac{10\cdot 12}{10+12}}\approx 2{,}0342$$
3. Vergleich mit Tabellenwert Der **Freiheitsgrad** beim t-Test zweier Stichproben ist $$f=n_1+n_2-2$$ Wenn für das gegebene **Signifikanzniveau** gilt: $t_{Prüf} > t_{Tabelle}$: Nullhypothese wird verworfen. $t_{Prüf} < t_{Tabelle}$: Nullhypothese wird akzeptiert.	3. Vergleich mit Tabellenwert Der Freiheitsgrad beträgt $$f=10+12-2=20$$ In der Tabelle findet sich in der Zeile f = 20 mit α = 0,05 der Wert $t_{Tabelle}$ = 2,086. Da $t_{Prüf} < t_{Tabelle}$: Nullhypothese wird akzeptiert
4. Interpretation des Ergebnisses Wenn die Nullhypothese verworfen wurde. Die Fehlerwahrscheinlichkeit für diese Entscheidung liegt (unter) der Irrtumswahrscheinlichkeit α. Wenn die Nullhypothese akzeptiert wurde. Die Fehlerwahrscheinlichkeit für diese Entscheidung (β-Fehler) ist nicht bekannt und über einen t-Test nicht ermittelbar.	4. Interpretation des Ergebnisses Wir gehen davon aus, dass sich die beiden Farbstofflösungen nicht in ihrem Gehalt unterscheiden. Die Unterschiede im Mittelwert der Bestimmung (Stichproben) sind rein zufällig. Die exakte Wahrscheinlichkeit für eine fälschlicherweise Akzeptierung des Nullhypothese (β-Fehler) ist nicht bekannt.