

Vergleich eines arithmetischen Mittelwerts mit einem Sollwert (Einstichproben-t-Test) FTCCT



1. Ausgangsdaten

Eine Stahllegierung besitzt laut Herstellerangaben einen Mangangehalt von $w(\text{Mn}) = 1,50\%$.

Er wurde in einer Messreihe überprüft. Zusammenfassung:

- arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 1,47\%$
- Stichprobenstandardabweichung: $s = 0,049$
- Stichprobenumfang: $n = 20$

2. Aufstellung der zu prüfenden Hypothese

Nullhypothese (H_0): Der Unterschied zwischen dem Mittelwert und dem Sollwert ist zufällig. Der wahre Mittelwert (bei Erfassung der Grundgesamtheit) entspricht dem Sollwert.

3. Ermittlung der Teststatistik (Prüfgröße) t

Die *Teststatistik* (t) für den t-Test zwischen einem Stichprobenmittelwert und einem Sollwert lautet:

$$t = \frac{|\bar{x} - x_{\text{soll}}|}{s} \cdot \sqrt{n}$$

Bei uns: $t_{\text{Versuch}} = \frac{|1,47 - 1,50|}{0,049} \cdot \sqrt{20} \approx 2,738$

4. Vergleich mit dem Tabellenwert

Freiheitsgrad $f = n - 1$.

Bei uns: $f = 20 - 1 = 19$

Auszug aus der t-Tabelle für $f = 19$. (siehe t-Tabelle)

t-Verteilung nach STUDENT. Kritische Werte α in Abhängigkeit der Freiheitsgrade f									
f	Regelfall: Irrtumswahrscheinlichkeit α für zweiseitige Fragestellungen (P)								
	0.50	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
19	0,688	1,187	1,729	2,093	2,433	2,861	3,174	3,883	4,187

Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha\%$ (Signifikanzniveau)	t_{Tabelle}	Vergleich der t-Werte
0,5 (50%)	0,688	$t_{\text{Versuch}} > t_{\text{Tabelle}} \Rightarrow$ Nullhypothese wird abgelehnt. Irrtumswahrscheinlichkeit = α .
0,25 (25%)	1,187	
0,1 (10%)	1,729	
0,05 (5%)	2,093	
0,025 (2,5%)	2,433	
0,01 (1%)	2,861	$t_{\text{Versuch}} < t_{\text{Tabelle}} \Rightarrow$ Nullhypothese wird akzeptiert.
0,005 (0,5%)	3,174	
0,001 (0,1%)	3,883	
0,0005 (0,05%)	4,187	

5. Interpretation des Ergebnisses

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α (Signifikanzniveau) ist die Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie in Wirklichkeit zutrifft.

Ist die Teststatistik (t_{Versuch}) größer als der tabellierte Tabellenwert, t_{Tabelle} , wird die Nullhypothese verworfen. Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit (α) von unter 2,5% kann hier also die Nullhypothese abgelehnt werden. Das heißt es kann mit relativ großer Sicherheit davon ausgegangen werden, dass ein Unterschied zwischen dem *wahren Mittelwert* und dem Sollwert besteht. Es besteht nur eine kleine Restwahrscheinlichkeit (<2,5%), die Nullhypothese fälschlicherweise zu *verwerfen*.

Er haben sich folgende sprachliche Regelung etabliert.

- Verwerfung von H_0 mit $\alpha < 5\%$: „signifikanter Unterschied“
- Verwerfung von H_0 mit $\alpha < 1\%$: „hoch signifikanter Unterschied“

Vergleicht man die Prüfgröße mit dem t-Wert für $\alpha = 0,01$ stellt man fest, dass $t_{\text{Versuch}} < t_{\text{Tabelle}}$. Das heißt man akzeptiert die Nullhypothese. Ein Unterschied zwischen Mittelwert und Sollwert kann nicht mehr angenommen werden, wenn man eine Irrtumswahrscheinlichkeit von nur $\alpha = 1\%$ zulässt. Wie groß die Irrtumswahrscheinlichkeit dabei ist, die Nullhypothese fälschlicherweise zu *akzeptieren* (β -Fehler), kann **nicht** aus dem t-Test geschlossen werden!

Mit sinkender Irrtumswahrscheinlichkeit ...5% \rightarrow 2% \rightarrow 1% \rightarrow 0,2% \rightarrow 0,1%... nimmt der tabellierte t-Wert immer weiter zu. Für einen gegebenen Prüfwert t ist es immer schwieriger noch überhalb von t_{Tabelle} zu liegen. Eine signifikanten Unterschied von Sollwert und Mittelwert nachzuweisen, ist damit immer schwerer.

6.t-Test mit einem Tabellenkalkulationsprogramm

Man kann den t-Test auch mit einem Tabellenkalkulationsprogramm sehr bequem durchführen. Hierfür gibt es vorgefertigte Formeln.

<https://youtu.be/uxaASZrO5bQ>



t-Verteilung nach STUDENT. Kritische Werte α in Abhängigkeit der Freiheitsgrade f									
f	Regelfall: Irrtumswahrscheinlichkeit α für zweiseitige Fragestellungen (P)								
	0.50	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	Irrtumswahrscheinlichkeit α für einseitige Fragestellungen (P) – liegt vor, wenn aus theor. Überlegungen die eine Größe (1. Mittelwert) <u>nur größer</u> oder <u>nur kleiner</u> sein kann als die Vergleichsgröße (2. Mittelwert, Sollwert o.ä.)								
	0.25	0.125	0.05	0.025	0.0125	0.005	0.0025	0.0005	0.000025
1	1,000	2,414	6,314	12,706	25,452	63,657	127,321	636,619	1273,240
2	0,816	1,604	2,920	4,303	6,205	9,925	14,089	31,599	44,705
3	0,765	1,423	2,353	3,182	4,177	5,841	7,453	12,924	16,326
4	0,741	1,344	2,132	2,776	3,495	4,604	5,598	8,610	10,306
5	0,727	1,301	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773	6,869	7,976
6	0,718	1,273	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317	5,959	6,788
7	0,711	1,254	1,895	2,365	2,841	3,499	4,029	5,408	6,082
8	0,706	1,240	1,860	2,306	2,752	3,355	3,833	5,041	5,617
9	0,703	1,230	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690	4,781	5,291
10	0,700	1,221	1,812	2,228	2,634	3,169	3,581	4,587	5,049
11	0,697	1,214	1,796	2,201	2,593	3,106	3,497	4,437	4,863
12	0,695	1,209	1,782	2,179	2,560	3,055	3,428	4,318	4,716
13	0,694	1,204	1,771	2,160	2,533	3,012	3,372	4,221	4,597
14	0,692	1,200	1,761	2,145	2,510	2,977	3,326	4,140	4,499
15	0,691	1,197	1,753	2,131	2,490	2,947	3,286	4,073	4,417
16	0,690	1,194	1,746	2,120	2,473	2,921	3,252	4,015	4,346
17	0,689	1,191	1,740	2,110	2,458	2,898	3,222	3,965	4,286
18	0,688	1,189	1,734	2,101	2,445	2,878	3,197	3,922	4,233
19	0,688	1,187	1,729	2,093	2,433	2,861	3,174	3,883	4,187
20	0,687	1,185	1,725	2,086	2,423	2,845	3,153	3,850	4,146
21	0,686	1,183	1,721	2,080	2,414	2,831	3,135	3,819	4,110
22	0,686	1,182	1,717	2,074	2,405	2,819	3,119	3,792	4,077
23	0,685	1,180	1,714	2,069	2,398	2,807	3,104	3,768	4,047
24	0,685	1,179	1,711	2,064	2,391	2,797	3,091	3,745	4,021
25	0,684	1,178	1,708	2,060	2,385	2,787	3,078	3,725	3,996
26	0,684	1,177	1,706	2,056	2,379	2,779	3,067	3,707	3,974
27	0,684	1,176	1,703	2,052	2,373	2,771	3,057	3,690	3,954
28	0,683	1,175	1,701	2,048	2,368	2,763	3,047	3,674	3,935
29	0,683	1,174	1,699	2,045	2,364	2,756	3,038	3,659	3,918
30	0,683	1,173	1,697	2,042	2,360	2,750	3,030	3,646	3,902
31	0,682	1,172	1,696	2,040	2,356	2,744	3,022	3,633	3,887
32	0,682	1,172	1,694	2,037	2,352	2,738	3,015	3,622	3,873
33	0,682	1,171	1,692	2,035	2,348	2,733	3,008	3,611	3,860
34	0,682	1,170	1,691	2,032	2,345	2,728	3,002	3,601	3,848
35	0,682	1,170	1,690	2,030	2,342	2,724	2,996	3,591	3,836
40	0,681	1,167	1,684	2,021	2,329	2,704	2,971	3,551	3,788
45	0,680	1,165	1,679	2,014	2,319	2,690	2,952	3,520	3,752
50	0,679	1,164	1,676	2,009	2,311	2,678	2,937	3,496	3,723
75	0,678	1,159	1,665	1,992	2,287	2,643	2,892	3,425	3,639
100	0,677	1,157	1,660	1,984	2,276	2,626	2,871	3,390	3,598
∞	0,674	1,150	1,645	1,960	2,241	2,576	2,807	3,291	3,481

Hinweis: Formel in LibreOffice CALC zum Anzeigen jedes beliebigen Wertes: In Zelle A2 die Irrtumswahrscheinlichkeit (α) eingeben, z.B. 0,05. In Zelle A3 den Freiheitsgrad (f) eingeben, z.B. 19 =**RUNDEN(T.INV.2S(A2;A3);3)** Prüfen ob Ergebnis mit Tabelle übereinstimmt, hier z.B. 2,093