Vs. 2024-10-21

# Anleitung zum F-Test: Prüfen, ob die Varianzen zweier Stichproben homogen sind



*Gutes Lernvideo, dass genau die Inhalte (9,5 min) dieser Anleitung wiedergibt: https://youtu.be/betZ6r8z4XA*

*Mit dem F-Test kann* mit einer gewissen Konfidenz (≙ *„Stichhaltigkeit“*) entschieden werden, ob zwei Stichproben aus unterschiedlichen, normalverteilten Grundgesamtheiten sich hinsichtlich ihrer Varianzen ($s^2$ = Quadrate der Standardabweichungen, **=“*Streuung*“**) wesentlich unterscheiden. Nur wenn der F-Test als Ergebnis liefert, dass sich die Stichprobenstreuungen nicht wesentlich unterscheiden (= *„homogene Varianzen“*), liefert ein t-Test zum Stichprobenvergleich ein statistisch gültiges Ergebnis. Mit der Durchführung des F-Tests wird also geprüft, ob eine notwendige Vorbedingung des t-Tests erfüllt ist.

**Beispiel:** *Bei zwei Farbstoffproben wurden mehrmals der Gehalt bestimmt. Mit den Stichprobenumfängen nA = 10 und nB = 12 resultieren folgende Ergebnisse (in mg/L):*

| | | | | | | | | | | | | | Mittelwert | Stichproben-Standardabweichung (s) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Probe A:** | 20,8 | 21,5 | 20,4 | 21,3 | 20,1 | 20,4 | 21,0 | 20,9 | 21,2 | 19,8 | | | **20,74** | **0,550151494287407** |
| **Probe B:** | 21,2 | 20,1 | 19,9 | 20,5 | 19,9 | 21,0 | 19,8 | 20,2 | 20,0 | 20,8 | 20,1 | 20,1 | **20,30** | **0,465149047471492** |

*Es ist auf dem Signifikanzniveau von 95% (Irrtumswahrscheinlichkeit α = 5% = 0,05) zu prüfen, ob es die beiden Varianzen der Stichproben homogen sind.*

<table>
<tr><th>Allgemeine Vorgehensweise</th><th>Konkretisierung für dieses Beispiel</th></tr>
<tr><td>

**1. Formulierung der Nullhypothese ($H_0$)**

Die Nullhypothese ist die Annahme, dass der Unterschied in den Varianzen der beiden Stichproben zufälliger Natur ist, die beiden *wahren Varianzen* (würde man erhalten, wenn man die Mittelwerte aus unendlich großen Stichprobenumfängen vergleichen würde) sind identisch. $s_A^2 = s_B^2$

</td><td>

**1. Formulierung der Nullhypothese ($H_0$)**

Wir gehen davon aus, dass die wahren Varianzen bei unendlich großen Stichprobenumfängen in Wirklichkeit identisch sind. Der hier vorhandene Unterschied ist nur zufälliger Natur, da nur Stichproben mit geringem Umfang miteinander vergleichen wurden. In Wirklichkeit ist $s_A^2 = s_B^2$.

</td></tr>
<tr><td>

**2. Berechnung der Prüfgröße, $F_{Prüf}$:**

$$F_{Prüf} = \frac{s_A^2}{s_B^2}$$

Varianzen so zuweisen, dass $s_A^2 > s_B^2$, d.h. für den Bruch kommt ein Ergebnis >1 heraus ($F_{Prüf} > 1$). Die Varianzen $s_A^2$ und $s_B^2$ sind die Quadrate der Stichproben-Standardabweichungen:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \underline{\text{oder}} \quad s^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

</td><td>

**2. Berechnung der Teststatistik, $F_{Püf}$:**

Da die Standardabweichungen $s_A$ und $s_B$ gegeben sind:

$$s_A^2 = 0{,}550151494287407^2 = 0{,}3026666667$$
$$s_B^2 = 0{,}465149047471492^2 = 0{,}2163636364$$

*Die größere der beiden Varianzen dient stets als Zähler.*

$$F_{Prüf} = \frac{0{,}3026666667}{0{,}2163636364} \approx 1{,}39888$$

</td></tr>
<tr><td>

**3. Vergleich mit Tabellenwert**

Der **Freiheitsgrade** der beiden Stichproben $f_A$ und $f_B$ betragen jeweils: $f = n - 1$ .

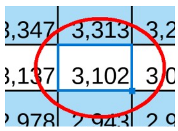
In der Tabelle mit der F-Verteilung in Abhängigkeit von $f_A$, $f_B$ und α den Tabellenwert $F_{tabelle}$ ablesen. Wenn für das gegebene **Signifikanzniveau** gilt:

- $F_{Prüf} > F_{Tabelle}$: Nullhypothese wird verworfen.
- $F_{Prüf} < F_{Tabelle}$: Nullhypothese wird akzeptiert.

</td><td>

**3. Vergleich mit Tabellenwert**

Mit f = 10 – 1 = 9 und f = 12 – 1 = 11 resultiert aus der Tabelle mit der F-Verteilung:




Achtung: f = 9 gehört zur Datenreihe mit der größeren Varianz ($s_A^2$) ⇒ Legt die Spaltennummer fest. F = 11 legt die Zeilennummer fest. ⇒ nicht verwechseln.

Da $F_{Prüf} < F_{tabelle}$ (1,39888 < 3,102): Nullhypothese akzeptiert.

</td></tr>
<tr><td>

**4. Interpretation des Ergebnisses**

- Wenn Nullhypothese verworfen: Varianzen sind nicht homogen ⇒ t-Test nicht durchführbar. Die Fehlerwahrscheinlichkeit für irrtümliche Verwerfung beträgt α.
- Wenn Nullhypothese akzeptiert: Varianzen sind homogen ⇒ t-Test durchführbar. Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Akzeptanz (β-Fehler) ist nicht bekannt. .

</td><td>

**4. Interpretation des Ergebnisses**

Die Varianzen sind auf dem Signifikanzniveau „95%“ (α = 0,05) homogen, der t-Test deshalb durchführbar. Die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Akzeptanz der Nullhypothese (β-Fehler) ist nicht bekannt.

Viel Spaß beim t-Test.

</td></tr>
</table>