Rechnen mit Proportionen: Der Dreisatz C1BL

Die weitaus meisten Rechnungen in der Chemie und Biologie lassen sich ausschließlich unter Verwendung des Dreisatzes lösen. Voraussetzung hierfür ist, dass zwei Größen zueinander **proportional** sind. Was bedeutet das?

Proportionalität

Stehen zwei Größen in einem festen Zahlenverhältnis zueinander, so sagt man auch: *„Diese Größen sind zueinander proportional“*. Beispielsweise ist das Zahlenverhältnis Finger (F) zu Hand (H) immer *„5 **zu** 1“*. Mit anderen Worten: *„5 Finger entsprechen einer Hand“ oder „5 Finger **pro** Hand“*. Genau wie es sprachlich verschiedene Varianten für diesen Sachverhalt gibt, gibt auch verschiedene Darstellungsweisen, **die alle dieselbe Bedeutung haben**:

- Statt dem **„zu“** nutzt man das *dividiert*-Zeichen oder den Bruchstrich: F **:** H = 5 **:** 1 oder $\frac{F}{H}=\frac{5}{1}=5$
- Statt dem „*entsprechen*“ nutzt man auch das Symbol „≙“: 5 Finger ≙ 1 Hand.
- Statt dem „*pro*“ nutzt man auch den Bruchstrich: $5\frac{F}{H}$

Weiß man, in welchem Zahlenverhältnis zwei Größen zueinander stehen, so kann man für eine gegebene Größe die andere Größe berechnen. *Beispielaufgabe:* Wie viel Finger besitzen 7 Hände? *Antwort:* Da eine Hand 5 Fingern entspricht, entsprechen 7 Hände 35 Fingern.

Das Kalkül des Dreisatzes

Beispielaufgabe: Zum Backen von Muffins werden 85 Gramm Mehl pro Muffin (Muf) benötigt ($85\frac{g}{Muf}$ **).**

a) Wie viel Muffins lassen sich mit 2550 Gramm Mehl backen?

1. Aufschreiben der beiden Paare mit dem ≙-Zeichen:

   ① 85 g ≙ 1 Muf ② [Anm: Gegebenes Wertepaar aus Aufgabenstellung]

   ③ 2550 g ≙ x Muf ④ [Anm: Wertepaar mit der gesuchten Größe x]

2. Mathematische Formulierung als Verhältnis mit dem Bruchstrich und Auflösen nach x:

   $\frac{①}{③}=\frac{②}{④}$ also $\frac{85}{2550}=\frac{1}{x}$ Auflösen nach x: $\Rightarrow\Rightarrow x=30$ Es können 30 Muffins gebacken werden.

   Das Verhältnis kann auch anders gebildet werden kann. Es kommt dasselbe für x heraus. So liefert beispielsweise auch folgende Verhältnisbildung dasselbe Ergebnis:

   $\frac{②}{①}=\frac{④}{③}$ also $\frac{1}{85}=\frac{x}{2550}$ Auflösen nach x: $\Rightarrow\Rightarrow x=30$

   Nicht erlaubt ist z.B. ①/③ = ④/②, da hier der eine Bruch von oben nach unten (①/③) und der andere Bruch von unten nach oben (④/②) gebildet wurde. Das ist nicht gleichsinnig. Auch über Kreuz ist nicht erlaubt!

b) Wie viel Muffins werden pro Gramm Mehl rechnerisch gebacken? Geben Sie in der Einheit Muf/g an.

1. Aufschreiben der beiden Paare mit dem ≙-Zeichen:

   ① 85 g ≙ 1 Muf ②

   ③ 1 g ≙ x Muf ④

2. Mathematische Formulierung als Verhältnis mit dem Bruchstrich und Auflösen nach x:

   z.B. $\frac{x}{1}=\frac{1}{85}$ $\Rightarrow\Rightarrow x\approx 0{,}011764$ ⇒ Das Ergebnis lautet der geforderten Einheit: 0,011764 Muf/g.

c) Wie viel Gramm Mehl werden für 25 Muffins benötigt?

85 g ≙ 1 Muf

x g ≙ 25 Muf $\frac{x}{25}=\frac{85}{1}\Rightarrow x=2125\,g$ *Es werden 2125 g Mehl benötigt.*

Schlussbemerkung

Auch wenn das Rechnen mit dem Dreisatz ein eher intuitiver Ansatz ist, werden wir zunehmend Rechnungen auch *formal*isiert (also mit Formeln und Symbolen) lösen. Das Rechnen mit Formeln bietet beispielsweise den Vorteil, dass Routine-Aufgaben wesentlich schneller gelöst werden können.

1. Einfachere Aufgaben mit dem Dreisatz - Mit dem oben beschriebenen Verfahren lösen

1.1 *In 0,25 Liter Flüssigkeit sind 400 Milligramm (mg) Wirkstoff gelöst.*

a) *In welchem Flüssigkeitsvolumen sind 580 mg Wirkstoff gelöst?*

b) *Berechnen Sie das Flüssigkeitsvolumen pro Milligramm Wirkstoff (L/mg).*

c) *Berechnen Sie den Wirkstoffgehalt der Lösung in mg/L (also in Milligramm pro Liter)*

1.2 Die Dichte einer Lösung beträgt ρ = 1,2854 g/cm^3.

a) Welche Masse (m) besitzen 10,5 Liter?

b) Formulieren Sie eine mathematische Formel, die statt des Dreisatzes angewendet werden kann.

1.3 Die Glucosekonzentration (β) einer Lösung beträgt 150 mg/L.

a) In welchem Volumen (V) finden sich m = 8 Gramm Glucose gelöst?

b) Formulieren Sie eine mathematische Formel, die statt des Dreisatzes angewendet werden kann.

1.4 Im Zweifelsfall muss die Größe auch nicht interpretiert werden können. Beispiel: Die elektrische Leitfähigkeit (k) von Wolfram beträgt 19106 Siemens pro Meter (S·m^{-1}) *[was auch immer das bedeuten möge]*. Welche Länge (l) hat ein Wolfram-Draht mit einem elektrischen Leitwert von G = 12,5 Megasiemens?

1.5 Die Molare Masse *[was auch immer das bedeuten möge]* von Harnstoff beträgt M = 60,06 g/mol

a) Welche Stoffmenge n (in mol), entsprechen m = 15 Gramm?

b) Formulieren Sie eine mathematische Formel mit n, M und m, die statt des Dreisatzes genutzt werden kann.

2. Komplexere Aufgaben mit dem Dreisatz lösen: Hier muss man den Dreisatz jeweils mehrmals anwenden

2.1 Die Erythrozytenkonzentration (ec) einer Blutprobe beträgt ec = 6,39·10^6 Erythrozyten/µL. Der Hämoglobingehalt der gleichen Probe beträgt hg = 14,1 g Hb/100 mL. Berechnen Sie die durchschnittliche Hämoglobinmasse pro Erythrozyt in der Einheit Picogramm/Erythrozyt. *(Ähnlich einer Prüfungsaufgabe, CBL Abschlussprüfung Teil 1, 2019)*

2.2 Ein Kalibrierlösung liefert bei einer Einwirkzeit von 8 Minuten und einem Gehalt von 2,5 g/L das Messergebnis 0,248 Einheiten (units).

a) Wie groß ist das Signal einer Lösung von 4,1 g/L und einer Einwirkzeit von 2,5 Minuten?

b) Geben Sie den Kennwert der Kalibrierlösung in der Einheit $\dfrac{Units}{\dfrac{min \cdot g}{L}}$ an.