Kennzahlen der beschreibenden Statistik

Das Skript ist so gestaltet, dass es sowohl mit einem herkömmlichen wissenschaftlichen Taschenrechner als auch computergestützt mit einem Tabellenkalkulationsprogramm bearbeitet werden kann. Beide Methoden ergänzen sich sinnvoll, wenn man zuerst mit dem Taschenrechner arbeitet und dann die Aufgaben anschließend computergestützt bearbeitet.

Was ist beschreibende Statistik?

Die *beschreibende (deskriptive) Statistik* hat zum Ziel, Daten durch Tabellen, Kennzahlen und Grafiken übersichtlich und zusammenfassend darzustellen. Dies ist vor allem bei umfangreichem Datenmaterial sinnvoll, da dieses nicht leicht überblickt werden kann. Im Gegensatz zu dieser beschreibenden Aufgabe gibt es auch die *schließende Statistik*. Hier werden die Daten mit statistischen Methoden interpretiert und Schlüsse gezogen. **Beispiel:** Die Erythrozytenkonzentration zweier Blutproben wurde jeweils durch mehrmalige Messungen bestimmt. Die Mittelwerte der beiden Proben unterscheiden sich geringfügig voneinander. Handelt es sich hierbei um einen zufälligen Unterschied, der darauf basiert, dass nur Stichproben gezogen und nicht das gesamte Blut untersucht wurden? Sind also, wenn man das gesamte Blut untersuchen würde, die wahren Mittelwerte identisch? Mit Methoden der *schließenden Statistik* kann man beurteilen, ob es tatsächlich einen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Blutproben gibt.

Statistische Lagemaße von Daten

Beispiel: Flügellängen von Insekten: Zur Analyse der innerartlichen Variabilität wurden die Flügellängen an 25 Individuen einer Insektenart gemessen.

Urliste: Flügellängen in mm, Stichprobenumfang n = 25								
3,8	3,6	4,3	3,5	4,1	4,4	4,5	3,6	3,8
3,3	4,3	3,9	4,3	4,4	4,1	3,6	4,2	3,9
3,8	4,4	3,8	4,7	3,8	3,6	4,3		

Bei der *Primärliste* sind die Werte nach der Größe angeordnet

Primärliste: Flügellängen in mm, Stichprobenumfang n = 25									
x_{min} =	3,3	3,5	3,6	3,6	3,6	3,6	3,8	3,8	3,8
3,8	3,8	3,9	3,9	4,1	4,1	4,2	4,3	4,3	4,3
4,3	4,4	4,4	4,4	4,5	4,7				

1. Häufigkeitstabelle

Diese wird häufig als Strichliste angefertigt. Es bietet sich an die einzelnen Messwerte mit der Bezeichnung x_i zu versehen, bei der i der Laufindex ist.

Häufigkeitstabelle: Flügellängen in [mm]		
Meßwert x_i	*Strichliste*	*Häufigkeiten f_i*
$x_1 = 3.3$	|	1 oder $f_1 = 1$
$x_2 = 3.4$		0 $f_2 = 0$
$x_3 = 3.5$	|	1 $f_3 = 1$
$x_4 = 3.6$	||||	4 $f_4 = 4$
$x_5 = 3.7$		0 $f_5 = 0$
$x_6 = 3.8$	~~||||~~	5 $f_6 = 5$
$x_7 = 3.9$	||	2 $f_7 = 2$
$x_8 = 4.0$		0 $f_8 = 0$
$x_9 = 4.1$	||	2 $f_9 = 2$
$x_{10} = 4.2$	|	1 $f_{10} = 1$
$x_{11} = 4.3$	||||	4 $f_{11} = 4$
$x_{12} = 4.4$	|||	3 $f_{12} = 3$
$x_{13} = 4.5$	|	1 $f_{13} = 1$
$x_{14} = 4.6$		0 $f_{14} = 0$
$x_{15} = 4.7$	|	1 $f_{15} = 1$
Stichprobenumfang n		25 oder $\sum f_i = 25$

2. Arithmetisches Mittel

Der Wert $x=\frac{1}{n}\cdot\sum x_i$, d.h. die Summe aller Messwerte x_i (x_1+ x_2+ x_3+ …) geteilt durch die Anzahl *n* aller Messwerte, heißt **arithmetisches Mittel.** Er kann mit den einzelnen Werten für x_i anhand der Urliste berechnet werden. Etwas kürzer ist die Berechnung mithilfe der Häufigkeitstabelle. Hier werden die Produkte aus Messwert und Häufigkeit für jedes i gebildet ($x_i \cdot f_i$) und anschließend aufsummiert. Anschließend teilt man durch die Anzahl aller Messwerte, die der Summe aller Häufigkeiten ($\sum f_i$) entspricht:

$$\overline{x}=\frac{1}{\sum f_i}\cdot\sum(x_i\cdot f_i)$$

2.1 Berechnen Sie das arithmetische Mittel des oberen Beispiels (Flügellängen) mithilfe der wiedergebenen Häufigkeitstabelle.

**2.1: Worin unterscheiden sich die Funktionen MITTELWERT UND MITTELWERTA? Zeigen Sie dies mit einer Datenreihe, in der einer der Einträge ein Wort (statt Zahl) ist.*

3. Gewogenes arithmetisches Mittel

Hat man mehrere Stichproben durchgeführt, so kann man aus den einzelnen Mittelwerten einen gemeinsamen Mittelwert bilden. Dabei gehen die Stichprobenmittelwerte entsprechend dem Stichprobenumfang mit unterschiedlicher Gewichtung in den Mittelwert ein:

$$\overline{\overline{x}}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i\cdot\overline{x_i}$$, wobei

N	Gesamtanzahl über alle Stichproben
$\overline{x_i}$	arithmetisches Mittel der i-ten Stichprobe
n_i	Stichprobenumfang der entsprechenden Stichprobe
k	Anzahl der Stichproben

3.1 Für drei Getreidesorten wurde der Ertrag ermittelt. Für Sorte A liegen n_1 = 3, für Sorte B n_2 = 4 und für Sorte C n_3 = 3 Werte vor. Für jede Sorte wurde das arithmetische Mittel ($\overline{x_i}$) gebildet.

Sorte	*i = 1*	*i = 2*	*i = 3*
Stichprobenumfang n_i	*3*	*4*	*3*
Sortenmittelwert $\overline{x_i}$	*2,5*	*1,7*	*1,8*

Berechnen Sie das gewogene arithmetische Mittel mit dem Taschenrechner:

**3.2. Verwenden Sie zur Lösung des Problems die Funktionen SUMMENPRODUKT und SUMME.*

4. Modalwert

Der **Modalwert (D)** ist derjenige Wert, der in einer Beobachtungsreihe am häufigsten auftritt. Ein großer Vorteil ist, dass er nicht nur bei quantitativen (numerischen) Daten, sondern auch bei qualitativen Daten (z.B. Zellart, Wortart) angewendet werden kann.

Kommt jeder Wert nur einmal vor, so gibt es keinen Modalwert. Am häufigsten treten **monomodale Verteilungen** der Stichprobenwerte auf. Es können aber durchaus auch zwei ***(bimodal)*** oder mehrere Werte **(polymodal)** mit auffallenden Häufigkeiten in einer Stichprobe auftreten. Seine Berechnung ist nur bei umfangreichen Stichproben sinnvoll.

Beispiel für qualitativen Modalwert:

Leukozytenart	Anzahl (Strichliste)	Summe
Stabkernige neutrophile Granulozyten	////	4
Segmentkernige neutrophile Granulozyten	///// ///// ///// ///// ///// ///// /// // ///// ///// ///// ///// ////	59
Eosinophle Granulozyten	////	4
Basophile Granulozyten	/	1
Lymphozyten	///// ///// ///// ///// ///// /	26
Monozyten	///// /	6

4.1 Geben Sie die Modalwerte bei der Annahme einer bimodalen Verteilung an.

**4.2: Wie verhält sich die entsprechende Funktion, wenn es mehrere Modalwerte gibt? Prüfen Sie mithilfe einer Zahlenreihe.*

5. Median

Der ***Median (Z)*** halbiert die nach der Größe geordneten Folge der Einzelwerte (Primärliste), so dass gleich viele Messwerte unterhalb und oberhalb von Z liegen.
Handelt es sich um eine ungerade Anzahl von Messwerten, so entspricht Z dem mittleren Wert. Handelt es sich um eine gerade Anzahl von Messwerten, so muss aus den beiden in der Mitte liegenden Messwerte, das arithmetische Mittel gebildet werden.
5.1 Ermitteln Sie beim Beispiel der Flügellängen den Median Z.

**5.2 Nun computergestützt mit der entsprechenden Funktion.*

5.3 a) Der kleinste der Messwerte der Flügellängen (3,3) wird wegen eines Messfehlers verworfen. Berechnen Sie den Median anhand der restlichen Messwerte.

b) Welchen Vorteil besitzt der Median gegenüber dem arithmetischen Mittel?

6. Harmonisches Mittel ($\bar{x}_H$)

Neben dem arithmetischen Mittel *(siehe oben)*, gibt es noch andere Arten der Mittelwertbildung.
Das harmonische Mittel ist der Kehrwert des Arithmetischen Mittels der Kehrwerte.
6.1 Formulieren Sie eine passende Formel mit x_i und n (siehe auch Formel aus Abschnitt 2.)

Das harmonische Mittel wird bestimmt, wenn die zu Werte sinnvollerweise als Kehrwerte verrechnet werden müssen. Das ist häufig bei Werten der Fall, die eine Zeit- oder eine Geschwindigkeitskomponente haben. Auch „unendlich lange Zeit“, kann hier verrechnet werden.

6.1.a) In einem Tierversuch an 8 Tieren wurde nach Verabreichung eines Gifstoffs folgende Überlebenszeiten registriert:33 Tage, 24 Tage, 16 Tage, noch am Leben, 28 Tage, noch am Leben, 25 Tage, 12 Tage
Berechnen Sie die harmonisch gemittelte Überlebenszeit der Ratten.

b) Warum kann das arithmetische Mittel zur Mittelwertbildung hier nicht eingesetzt werden?

6.2 a) Ein Sportflugzeug fliegt von Karlsruhe nach Frankfurt (ca. 200 km) mit einer Geschwindigkeit von 300 km/h und zurück mit 450 km/h. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit.

b) Ein Sportflugzeug fliegt 1 Stunde mit 300 und 1 Stunde mit 450 km/h. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit.

6.3 Einem Kaninchen wurde ein Wirkstoff appliziert. Der Wirkungseintritt erfolgte nach folgenden Zeiten:

1 h 03 min 34 s	*1 h 00 min 43 s*	*0 h 57 min 59 s*	*1 h 00 min 02 s*
0 h 58 min 58 s	*1 h 04 min 51 s*	*1 h 02 min 30 s*	*1 h 04 min 00 s*

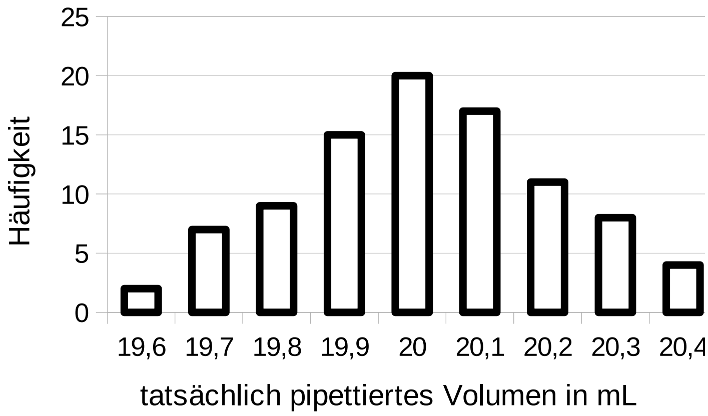
Berechnen Sie das arithmetische Mittel, das harmonische Mittel und den Median, jeweils in der Angabe „h: … m: s: “.

**6.3 Ein Schüler schreibt im Berufsfachliche Kompetenz insgesamt 7 Klassenarbeiten. Ist es für ihn günstiger, wenn der Lehrer das harmonische Mittel oder das arithmetische Mittel zur Notenbildung heranzieht? Prüfen Sie bei verschiedenen Konstellationen mithilfe des entsprechenden Funktion!*

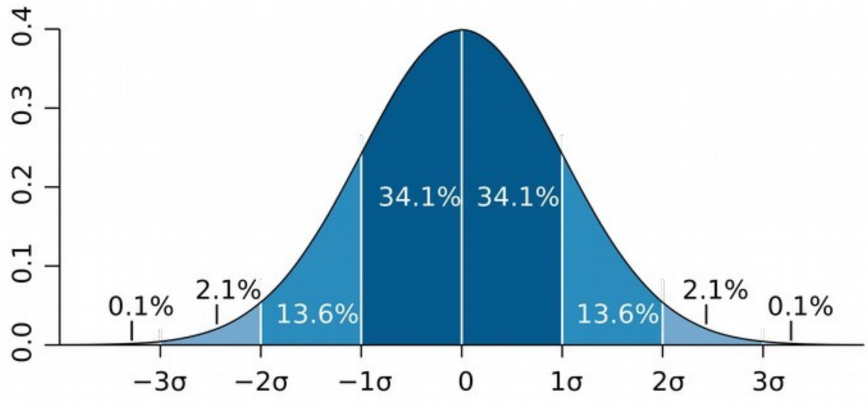
7. Normalverteilung und Standardabweichung

n = 93 Auszubildende aus Laborberufen sollten mit der Vollpipette 20 mL H_2O pipettieren. Durch Auswaage auf der Feinwaage konnte das pipettierte Volumen bestimmt und auf auf eine Nachkommastelle gerundet werden. Er ergaben sich folgende Häufigkeiten. Die Abbildung rechts gibt das Säulendiagramm an.

pipettiertes Volumen in mL	**Häufigkeit**
19,6	2
19,7	7
19,8	9
19,9	15
20,0	20
20,1	17
20,2	11
20,3	8
20,4	4



Würde man einen viel größeren Umfang an Proben nehmen und auch die tatsächlich pipettierten Volumina genauer auflösen (z.B. auf 3 Nachkommastellen) käme es zu einer Glättung des Säulendiagramms zu einer Kurve. Auch bei sehr vielen anderen statistischen Auswertungen entsteht dabei eine typische Glockenkurve, die **Normalverteilung** heißt**:**



Beschreibung der Abb. links: Grafische Darstellung der Normalverteilung. Auf der y-Achse ist die Häufigkeit der Messwerte dargestellt, auf der x-Achse die Abweichung des Messwertes zum tatsächlichen Wert bzw. Mittelwert (hier: $x = \bar{x} = 0$). Die Summe aller Häufigkeiten entspricht der Gesamtfläche der Kurve und beträgt 1 (100%). Quelle: www.wikipedia.de

Die Fläche der Glockenkurve, die zwischen den beiden Wendepunkten *(dort wo eine Links- in eine Rechtskurve über-geht bzw. umgekehrt)* der Glockenkurve liegt, beträgt rechnerisch ca. 68,2% (= 34,1% + 34,1%, *siehe Abb.*) der Gesamtfläche unterhalb der Kurve. Nimmt man eine ideale Normalverteilung von Messwerten an, so liegen ca. 68,2% der Messwerte im Intervall $\bar{x} \pm \sigma$. Der Abstand dieser Intervallgrenzen zum Mittelwert wird **Standardabweichung** (σ oder s) genannt. Verdoppelt man das Intervall, so beträgt die Fläche unterhalb der Kurve ca. 95,4% (= 34,1% + 34,1% + 13,6% + 13,6%). Das bedeutet im Intervall $\bar{x} \pm 2s \ (\text{oder } \bar{x} \pm 2\sigma)$, bei Annahme einer Normalverteilung der Messwerte ca. 95,4 % der Messwerte in diesem Wertebereich zu finden sind.

Die Standardabweichung ist also ein Maß für die Breite der Normalverteilung. Sie gibt damit an, wie sehr die einzelnen Messwerte rund um den Mittelwert streuen.

Sie lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{oder} \quad s = \sqrt{\frac{\sum \left(x_i^2\right) - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}}{n-1}}$$

Der ***Variationskoeffizient (VK)***, auch ***relative Standardabweichung (s%)*** genannt, ist prozentuale Standardabweichung bezogen auf den Mittelwert ($\bar{x}$): $s\% = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$

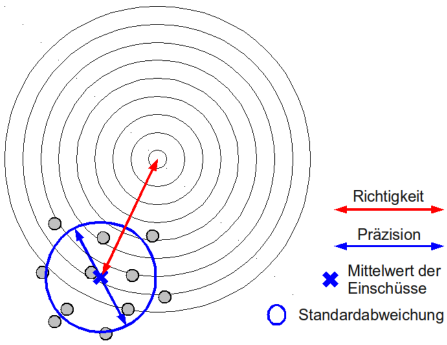
8. Systematischer und zufälliger Fehler, Richtigkeit und Präzision

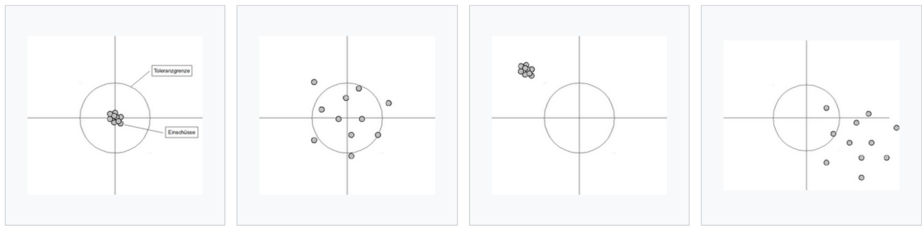
Systematischer Fehler: Messfehler der sich auch bei vielen (theoretisch: unendlich) wiederholten Messungen im Mittel nicht aufhebt. Häufig ist der wahre Wert nicht bekannt, so dass eine exakte Quantifizierung nicht möglich ist.

Zufälliger Fehler: Messfehler die sich bei vielen (theoretisch: unendlich) wiederholten Messungen im Mittel ausgleicht.

Präzision (precision): Ein Messung ist dann präzise, wenn die einzelnen Messwerte bei gleichbleibenden Untersuchungsobjekt nur wenig streuen. Eine quantitative Kennzahl für die Präzision ist die Standardabweichung und der Variationskoeffizient.

Richtigkeit (accuracy): Ein Messung ist um so richtiger, je größer die Übereinstimmung zwischen dem Mittelwert mit dem Erwartungswert (wahrer Wert) übereinstimmt. Häufig ist der wahre Wert nicht bekannt, so dass eine exakte Quantifizierung nicht möglich ist.





Richtigkeit und Präzision gut (gute Genauigkeit)	Richtigkeit gut, aber schlechte Präzision (schlechte Genauigkeit)	Präzision gut, aber schlechte Richtigkeit (schlechte Genauigkeit)	Präzision und Richtigkeit schlecht, die Genauigkeit natürlich auch

Quelle beider Bilder: www.wikipedia.de

8.1 In einem Versuch über die Genauigkeit von Volumenmessgeräten wurden 15 mal 20 mL Wasser mit der Vollpipette und mit dem Messzylinder pipettiert und die Masse des Wassers auf der Feinwaage gemessen. Folgende Werte wurden erhalten.

	Messzylinder	**Vollpipette**
Mittelwert (aus 15 Messungen)	19,7737 g	19,7210 g
Standardabweichung	0,1984 g	0,0556 g
Variationskoeffizient	1,00%	0,28%

Diskutieren Sie folgende Fragen mithilfe der oben gegebenen Definitionen!

Welches Messgerät war präziser? Warum weichen die Mittelwerte von 20,00 g ab? Welche Aussage macht die Standardabweichung und die welche Aussage die relative Standardabweichung?

Quellen

► www.wikipedia.de und www.wikipedia.org
► Köhler, Schachtel, Voleske (1996): Biostatistik, 2. Auflage, Springer-Verlag
► Brink, Fastert, Ignatowitz (2003): Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe. 2. Auflage, Europa Lehrmittel