Aufgaben zum t-Test

1. Grubbs-Test

2. t-Test zum Vergleich von Mittelwerten von Stichproben mit Sollwerten (Rechenhilfen am Ende des Arbeitsblattes

2.1. Eine Getreidesorte wird auf 51 Versuchsfeldern angebaut und der geerntete Ertrag bestimmt. Im Mittel liegt der Ertrag bei 55,8 kg/ar, die Standardabweichung liegt bei 3,25 kg/ar. Der Vertreiber des Saatguts behauptet, dass die Sorte im Durchschnitt einen Ertrag von 56,7 kg/ar erbringt. Kann die These, dass diese Angabe übertrieben ist, mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% bestätigt werden?

3. t-Test zum Vergleich zweier voneinander unabhängiger Mittelwerte (Rechenhilfe am Ende des Arbeitsblattes)

3.1. In 2 Stichproben wurden die Abschlussnote von Berufsschülern an 2 Schulen ermittelt:

Schule A:	2,2	2,6	3,5	1,7	1,4	1,4	2,1	2,4	2,0	4,3	3,1	2,8	4,0
Schule B:	1,0	2,6	3,2	2,3	1,6	1,8	1,3	3,7					

a) Ermitteln Sie für beide Stichproben das arithmetische Mittel.

b) Unterscheiden sich die Mittelwerte, auf einem Signifikanzniveau von 5% signifikant?

3.2 Die Serumkonzentration an Eisen wurde in zwei Stichproben bei männlichen und weiblichen Schülern ermittelt. Unterscheiden sich die Mittelwerte mit einem einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α = 0,01 signifikant?

	x Eisenkonzentration [µg/dL]	Standardabweichung	n
männliche Schüler A	102,1	39,1	20
weibliche Schüler B	81,4	42,5	20

Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Varianzen (s_A^2, s_B^2) der beiden Stichproben und ermitteln Sie daraus die *gemeinsame Standardabweichung* durch folgende Formel:

$$s_{A,B} = \pm\sqrt{\frac{(n_A - 1)\cdot s_A^2 + (n_B - 1)\cdot s_B^2}{n_A + n_B - 2}}$$

4. t-Test zu paarweise verbundenen Stichproben (Rechenhilfe am Ende des Arbeitsblattes)

4.1 Um herauszufinden, ob ein Unterschied in der Wirkung zwischen zwei optischen Isomeren (D- und L-Isomer) eines Schlafmittels besteht, wurde mit 10 Freiwilligen ein Versuch durchgeführt. Dabei erhielten die Personen im Abstand von einer Woche die beiden Präparate in zufälliger Reihenfolge. Es wurde die Schlafdauer in Stunden gemessen. Hinweis: Es handelt sich um paarweise verbundene Stichproben.

Patient-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D-Isomer (h)	9,7	5,4	6,8	7,1	6,9	10,4	10,7	8,6	7,0	7,2
L-Isomer (h)	8,9	7,8	8,1	8,0	6,9	11,0	12,4	7,9	11,3	10,5

Unterscheiden sich die Wirkung der beiden Isomere mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α = 0,05?

4.2. An 10 Hirschen wurde die Länge des rechten Vorderlaufs und des rechten Hinterlaufs vermessen. Überprüfen Sie mithilfe eines geeigneten Tests, ob sich die Länge der Vorder- und Hinterläufe mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α = 1% signifikant unterscheidet!

Hirsch	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Hinterlauf x (cm)	142	140	143	149	142	146	149	150	142	148
Vorderlauf y (cm)	135	136	147	139	143	141	143	147	136	146

4.3. Die Körpertemperatur von 10 Patienten wird zum Zeitpunkt der Verabreichung eines Medikaments (T_1) und 2 Stunden später (T_2) gemessen. Es soll geprüft werden, ob dieses Medikament eine fiebersenkende Wirkung hat. *Hinweis: Es handelt sich um eine einseitige Fragestellung.*

Patient-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temp. 1 in °C	39,1	39,3	38,9	40,6	39,5	38,4	38,6	39,0	38,6	39,2
Temp. 2 in °C	38,1	38,3	38,8	37,8	38,2	37,3	37,6	37,8	37,4	38,1

4.4. An 8 Obstbäumen wurde der Ertrag in 2 Jahren ermittelt. Es sollte dabei geklärt werden, ob die beobachteten Witterungsunterschiede einen signifikanten Einfluss auf den Ertrag besaßen ($\alpha = 5\%$).

Baum-Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Jahr X	36,1	31,4	34,2	32,8	35,9	31,5	31,3	35,5
Jahr Y	36,3	35,5	37,1	31,1	38,2	34,9	31,1	37,4

Rechenhilfen (ohne Gewähr)

Um die Tipparbeit auf dem Taschenrechner abzukürzen finden Sie hier die **Summen der quadratischen Abweichungen**

3.1. Schule A: 10,44; Schule B: 6,19
4.1 Summe der quadratischen Abweichungen der Differenzen: 25,12
4.2. Summe der quadratischen Abweichungen der Differenzen: 84,10
4.3. Summe der quadratischen Abweichungen der Differenzen: 0,604
4.4. Summe der quadratischen Abweichungen der Differenzen: 37,96875

Musterlösungen auf www.laborberufe.de

Weitere Aufgaben zum t-Test – Lösungen (ohne Gewähr)

Wenn Sie von diesen Musterlösungen profitieren, dann geben Sie etwas zurück, indem Sie mich auf Rechenfehler, Verständnisschwierigkeiten o.ä. aufmerksam machen. Letztendlich profitieren auch andere Schüler davon, wenn die Musterlösungen weitgehend fehlerfrei und verständlich sind.

2.1.

Aufstellen der Nullhypothese (H_0): Die Unterschiede beruhen auf dem zufälligen Charakter der Stichprobe. Der wahre Mittelwert entspricht dem Sollwert.

$$t_{Versuch} = \frac{|\bar{x} - \mu_T|}{s} \cdot \sqrt{n} \implies t_{Versuch} = \frac{|55,8 - 56,7|}{3,25} \cdot \sqrt{51} \approx 1,978$$

Freiheitsgrade FG = 50: $t_{tab}(0,05)$: 2,009

$t_{Versuch} < t_{tab}$: Nullhypothese akzeptiert. Es besteht kein Unterschied in den Mittelwerten. Die Irrtumswahrscheinlichkeit (β-Fehler) ist dabei nicht bekannt! β-Fehler (Fehler 2. Art): Fälschlicherweise wird die Nullhypothese akzeptiert, obwohl in Wirklichkeit die Alternativhypothese zutrifft)

3.1

Nullhypothese (H_0): Die wahren Mittelwerte an beiden Schulen sind identisch, die Abweichungen in den Stichprobenmittelwerten beruhen auf den zufälligen Charakter der Stichprobenziehung.

														arithm. Mittel	**SUMQUADABW**
Schule A:	2,2	2,6	3,5	1,7	1,4	1,4	2,1	2,4	2,0	4,3	3,1	2,8	4,0	**2,58**	**10,44**
Schule B:	1,0	2,6	3,2	2,3	1,6	1,8	1,3	3,7						**2,19**	**6,19**
gewogenes arithmetisches Mittel	2,43														

$$s_{A,B} = \pm\sqrt{\frac{\sum(x_A - \bar{x}_A)^2 + \sum(x_B - \bar{x}_B)^2}{n_A + n_B - 2}} \implies s_{A,B} = \pm\sqrt{\frac{10,44 + 6,19}{13 + 8 - 2}} \approx 0,94$$

$$t_{Prüf} = \frac{|\bar{x}_A - \bar{x}_B|}{s_{A,B}} \cdot \sqrt{\frac{n_A \cdot n_B}{n_A + n_B}} \implies t_{Prüf} = \frac{2,58 - 2,19}{0,94} \cdot \sqrt{\frac{13 \cdot 8}{13 + 8}} \approx 0,92$$

Freiheitsgrade: FG = $n_1 + n_2 - 2$ = 19 ==> t_{tab} = 2,093

$t_{Prüf} < t_{tab}$ ==> Nullhypothese akzeptiert. Die Irrtumswahrscheinlichkeit für diese Annahme (β-Fehler) ist unbekannt!

3.2.

Die Varianzen (s^2) entsprechen den quadrierten Standardabweichungen s.

s_A^2 = 1528,81

s_B^2 = 1806,25

$$s_{A,B} = \pm\sqrt{\frac{(n_A - 1) \cdot s_A^2 + (n_B - 1) \cdot s_B^2}{n_A + n_B - 2}} \implies s_{A,B} = \pm\sqrt{\frac{(20-1) \cdot 1528,81 + (20-1) \cdot 1806,25}{20 + 20 - 2}} \approx 40,84$$

$$t_{Prüf} = \frac{|\bar{x}_A - \bar{x}_B|}{s_{A,B}} \cdot \sqrt{\frac{n_A \cdot n_B}{n_A + n_B}} \implies t_{Prüf} = \frac{102,1 - 81,4}{40,84} \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 20}{40}} \approx 1,60$$

Freiheitsgrade: FG = 38 t_{tab} = 2,712

$t_{Prüf} < t_{tab}$ ==> Nullhypothese wird akzeptiert. Die Irrtumswahrscheinlichkeit für das fälschliche Akzeptieren der Nullhypothese ist dabei unbekannt.

4.1.

Aufstellen der Nullhypothese (H_0): Die wahren Mittelwerte unterscheiden sich nicht voneinander. Die Unterschied in der Wirksamkeit sind rein zufällig. Mit anderen Worten: Der wahre Mittelwert der Differenzen ist in Wirklichkeit Null.

Patient-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Mittelwert	SUMQUADABW	Standardabw.
D-Isomer (h)	9,7	5,4	6,8	7,1	6,9	10,4	10,7	8,6	7,0	7,2	unnötig (7,98)	unnötig (28,156)	unnötig (1,77)
L-Isomer (h)	8,9	7,8	8,1	8,0	6,9	11,0	12,4	7,9	11,3	10,5	unnötig (9,28)	unnötig (31,196)	unnötig (1,86)
Differenz D-L	0,8	-2,4	-1,3	-0,9	0,0	-0,6	-1,7	0,7	-4,3	-3,3	-1,3	25,12	1,67

$$t_{\text{Prüf}} = \frac{|\bar{d}|}{s_d} \cdot \sqrt{n} \implies t_{\text{Prüf}} = \frac{1,3}{1,67} \cdot \sqrt{10} = 2,46$$

Freiheitsgrade: FG = 9 ==> t_{tab} (0,05): 2,262

$t_{\text{Prüf}} > t_{tab}$: Nullhypothese verworfen. Es existiert ein signifikanter Unterschied (Irrtumswahrscheinlichkeit liegt unter α = 5%)

4.2

Hirsch	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Mittelwert	SUMQUADABW	Standardabw.
Hinterlauf x (cm)	142	140	143	149	142	146	149	150	142	148		145,1		
Vorderlauf y (cm)	135	136	147	139	143	141	143	147	136	146		141,3		
Differenz d (cm)	7	4	-4	10	-1	5	6	3	6	2		3,8	147,60	4,05

$$t_{\text{Prüf}} = \frac{|\bar{d}|}{s_d} \cdot \sqrt{n} \implies t_{\text{Prüf}} = \frac{3,8}{4,05} \cdot \sqrt{10} = 2,967$$

Freiheitsgrade: FG = 9 ==> t_{tab} (0,01): 3,250

$t_{\text{Prüf}} < t_{tab}$: Nullhypothese akzeptiert. Es gibt keinen signifikanter Unterschied (Irrtumswahrscheinlichkeit unbekannt)

4.3

Patient-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temp. 1 in °C	39,1	39,3	38,9	40,6	39,5	38,4	38,6	39	38,6	39,2
Temp. 2 in °C	38,1	38,3	38,8	37,8	38,2	37,3	37,6	37,8	37,4	38,1
Differenz d in °C	-1	-1	-0,1	-2,8	-1,3	-1,1	-1	-1,2	-1,2	-1,1
	-1									
Mittelwert der Differenzen			-1,18							
SUMQUADABW der Differenzen			0,604							
Standardabweichung der Differenzen			0,65962953							

Nullhypothese H_0 : Die gemessenen Temperaturdifferenzen sind zufälliger Art. Würde man sehr viele (unendlich viele) Patienten testen, dann wäre die Temperatur vor und nach Medikamenteneinnahme im Mittel gleich, d.h. die Temperaturdifferenzen im Mittel 0.

Prüfgröße: $t_{\text{Prüf}} = \frac{|\bar{d}|}{s_d} \cdot \sqrt{n} = \frac{1,18}{0,25905812} \cdot \sqrt{10} \approx 14,40$

Freiheitsgrad: FG = 9. $t_{Tab}(0,05)$ =1,833 – bei einseitiger Fragestellung.

=> $t_{Prüf} > t_{Tab}$ => Nullhypothese wird verworfen. Die Irrtumswahrscheinlichkeit für diese Entscheidung liegt unter 5%. Das heißt es gibt einen statistisch signifikanten Unterschied in den Temperaturen vor und nach Medikamentneinnahme. Das Medikament hat damit mit großer Wahrscheinlichkeit tatsächlich eine fiebersenkende Wirkung.

4.4

Es handelt sich um eine paarweise verbundene Stichproben, weil die einzelnen Testsubjekte zweimal untersucht wurden (bei unterschiedlichen Witterungseinflüssen).

Nullhypothese: Der Ertrag unterscheidet sich nur zufällig und ist nicht auf Witterungseinflüsse zurückzuführen. Würde man sehr viele Bäume messen, dann würde man feststellen, das im Mittel die Differenz im Ertrag 0 beträgt.

Baum-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Jahr X	36,1	31,4	34,2	32,8	35,9	31,5	31,3	35,5
Jahr Y	36,3	35,5	37,1	31,1	38,2	34,9	31,1	37,4
Differenz d	0,2	4,1	2,9	-1,7	2,3	3,4	-0,2	1,9
Mittelwert der Differenzen			1,6125					
Summe der quadr. Abw. der Diff.			27,84875					
Standardabweichung der Differenzen			1,994591					

Prüfgröße: $t_{\text{Prüf}} = \frac{|\overline{d}|}{s_d} \cdot \sqrt{n} = \frac{1,6125}{1,994591} \cdot \sqrt{8} \approx 2,287$

Freiheitsgrad: FG = 7. $t_{Tab}(0,05)$ =2,365.

=> $t_{Prüf} < t_{Tab}$ => Nullhypothese wird akzeptiert. Es kann kein signifikanter Unterschied im Ertrag nachgewiesen werden. Die Irrtumswahrscheinlichkeit für diese Entscheidung ist nicht bekannt (und völlig unabhängig von den 5%).